Reconstruction de surfaces paramétrées

Thibault Marzais

LAIC
IUT département Informatique BP 86
63173 AUBIÈRE CEDEX
FRANCE
marzais@laic.u-clermont1.fr

12 janvier 2007

Introduction

Modélisation géométrique

Représenter des objets dans la mémoire de l'ordinateur.

Différentes manières de modéliser un objet :

- Un nuage de points/voxels
- Un ensemble de polygones
- Surface paramétrée (Bézier, B-Spline)

↓ *Niveau de complexité*

Introduction

Modélisation géométrique

Représenter des objets dans la mémoire de l'ordinateur.

Différentes manières de modéliser un objet :

- Un nuage de points/voxels
- Un ensemble de polygones
- Surface paramétrée (Bézier, B-Spline)

↓ *Niveau de complexité*

Un problème en modélisation géométrique :

Passer d'une représentation à une autre.
En particulier, d'un nuage de points à une surface paramétrée

Introduction

Nuage de points
$\downarrow$ Triangulation
Triangulation
$\downarrow$ Partition
Ensemble de triangulations
$\downarrow$ Paramétrisation
Nuages de points paramétrés
LP fitting $\downarrow$ Least squares fitting (Reconstruction de surfaces)
Surfaces paramétrées

Plan

1. Définitions
   - Surfaces paramétrées
   - Programme linéaire
2. Reconstruction de surfaces
   - Généralités
   - Reconstruction exacte
   - Reconstruction approchée
   - Least square fitting
   - LP fitting
3. Techniques avancées
   - Paramétrisation
   - Triangulation
   - Continuité géométrique des surfaces

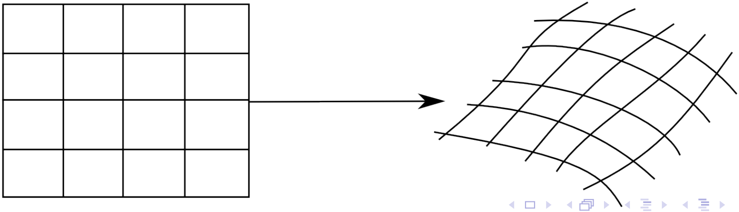
Expression d'une surface paramétrée

Définition d'un type de surface paramétrée

$$Q(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i f_i(s,t)$$

avec

- Base de fonctions $f_i : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$
- Points de contrôle $P_i \in \mathbb{R}^3$



Rappels

Expression d'une surface de Bézier

$$Q(s,t) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} P_{i,j} B_{i,m}(s) B_{j,n}(t)$$

Expression d'une surface B-Spline

$$Q(s,t) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} P_{i,j} N_{i,k}(s) N_{j,l}(t)$$

Programme linéaire

Définition

- Problème d'optimisation :

Minimiser (fonction de coût linéaire)
contraintes linéaires

Programme linéaire

Définition

- Problème d'optimisation :

$$\textit{Minimiser} \text{ (fonction de coût linéaire)}$$
$$\text{contraintes linéaires}$$

- Exemple

$$\underset{x,y}{Min}\,(5x + 7y)$$
$$3x - 9y \leq 2$$
$$8x + 12y = 7$$
$$-5x + 8y \leq 3$$

Plan

Notre problème de reconstruction

Nuage de points paramétré

LP fitting $\downarrow$ Least squares fitting (Reconstruction de surfaces)

Surface paramétrée

Notre problème de reconstruction

Nuage de points paramétré

LP fitting $\downarrow$ Least squares fitting (Reconstruction de surfaces)

Surface paramétrée

Données

- points M_k, $1 \leq k \leq N$
- paramètres s_k, t_k associés à M_k
- base de fonctions f_i $1 \leq i \leq n$

Notre problème de reconstruction

Nuage de points paramétré

LP fitting $\downarrow$ Least squares fitting (Reconstruction de surfaces)

Surface paramétrée

Données

- points M_k, $1 \leq k \leq N$
- paramètres s_k, t_k associés à M_k
- base de fonctions f_i $1 \leq i \leq n$

Résultats

- points de contrôle P_i d'une surface paramétrée

$$Q(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i f_i(s,t)$$

Données

- points M_k, $1 \leq k \leq N$
- paramètres s_k, t_k associés à M_k
- base de fonctions f_i $1 \leq i \leq n$

Résultats

- points de contrôle P_i d'une surface paramétrée
$$Q(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i f_i(s,t)$$

Données

- points M_k, $1 \leq k \leq N$
- paramètres s_k, t_k associés à M_k
- base de fonctions f_i $1 \leq i \leq n$

Résultats

- points de contrôle P_i d'une surface paramétrée

$$Q(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i f_i(s,t)$$

Données

- points M_k, $1 \leq k \leq N$
- paramètres s_k, t_k associés à M_k
- base de fonctions f_i $1 \leq i \leq n$

Résultats

- points de contrôle P_i d'une surface paramétrée $Q(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i f_i(s,t)$

Solution idéale ?

$$\forall k, \quad Q(s_k, t_k) = M_k$$

Système de reconstruction exacte

$$Q(s_k, t_k) = M_k \quad \forall k$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i f_i(s_k, t_k) = M_k \quad \forall k$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i^x f_i(s_k, t_k) = x_k \quad \forall k$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_i^y f_i(s_k, t_k) = y_k \quad \forall k$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_i^z f_i(s_k, t_k) = z_k \quad \forall k$$

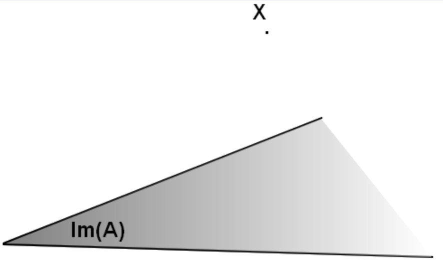
$$\Longleftrightarrow$$

$$A * P^x = X$$
$$A * P^y = Y$$
$$A * P^z = Z$$

Il suffit de résoudre ces trois systèmes indépendamment.

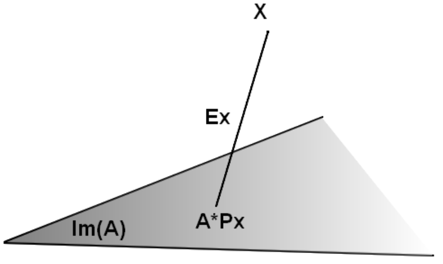
Premier système

Considérons le premier système : $A * P^x = X$
En général, il n'y a pas de solution exacte.



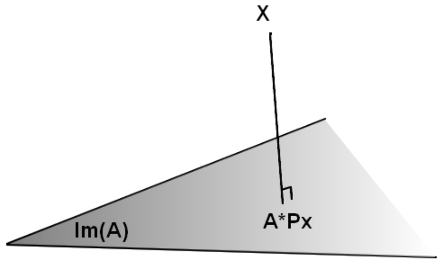
Pas de solution

Erreur E^x induite par le choix de P^x



Erreur E^x due aux points de contrôle P^x

Least square fitting



Least square fitting (Reconstruction par moindres carrés)

On minimise la norme euclidienne de E^x
Projection orthogonale de X sur $Im(A)$:
$P^x = (A^T \times A)^{-1} \times A^T \times X$

Nouvelle approche, nouvelle norme

Approche uniforme

Au lieu de minimiser la norme euclidienne de $E^x = A * P^x - X$, minimisons sa norme uniforme :

$$\underset{P^x}{Min}\left(||E^x||_\infty\right)$$

Formulation en programme linéaire

$$\left\{ \underset{P^x}{Min} \left(||E^x||_\infty \right) \right.$$

$$\iff \left\{ \underset{P^x}{Min} \left(\underset{i}{Max} |E_i^x| \right) \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \underset{P^x,h}{Min}(h) \\ -h \leq E_i^x \leq +h \;\; \forall i \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \underset{P^x,h}{Min}(h) \\ -h * \mathbb{1} \leq A * P^x - X \leq h * \mathbb{1} \end{array} \right.$$

Récapitulatif

Reconstruction de surfaces paramétrées

- Hypothèse forte : nuage de points paramétré
- Reconstruction d'un seul morceau de surface
  $\longrightarrow$ Problème si plusieurs morceau à "recoller"

Plan

Quelques éléments sur la paramétrisation

Principe

Assigner un couple s_i, t_i à chaque point 3D M_i d'un même groupe

Cartographier un ensemble de points

Quelques éléments sur la paramétrisation

Principe

Assigner un couple s_i, t_i à chaque point 3D M_i d'un même groupe
Cartographier un ensemble de points

Comment ?

Quelques éléments sur la paramétrisation

Principe

Assigner un couple s_i, t_i à chaque point 3D M_i d'un même groupe
Cartographier un ensemble de points

Comment ?

- Projection sur un plan approchant

Quelques éléments sur la paramétrisation

Principe

Assigner un couple s_i, t_i à chaque point 3D M_i d'un même groupe
Cartographier un ensemble de points

Comment ?

- Projection sur un plan approchant
- Paramétrisation (mapping) à l'aide d'une triangulation
  - equiareal mapping (area-preserving)
  - isometric mapping (length-preserving)
  - conformal mapping (angle-preserving)
  - harmonic maping (= conformal mapping + Cauchy Riemann conditions)

Quelques éléments sur la triangulation

Principe

Relier les points entre eux selon certains critères pour obtenir un ensemble de triangles

Méthodes

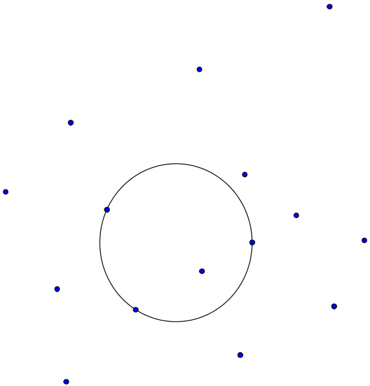
- Triangulation de Delaunay
- Alpha-shapes

Triangulation de Delaunay

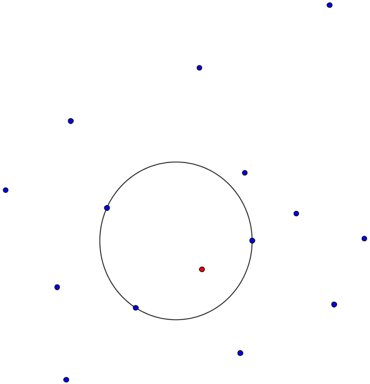
Définition informelle

C'est une triangulation qui est telle qu'aucun triangle ABC de celle-ci ne contient un autre point à l'intérieur de son cercle circonscrit.

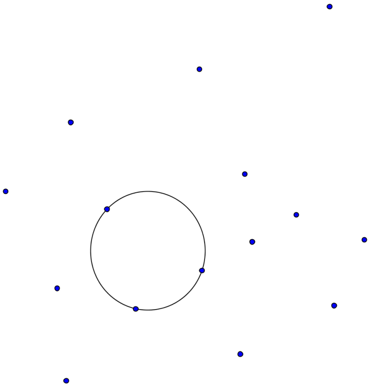
Triangulation de Delaunay



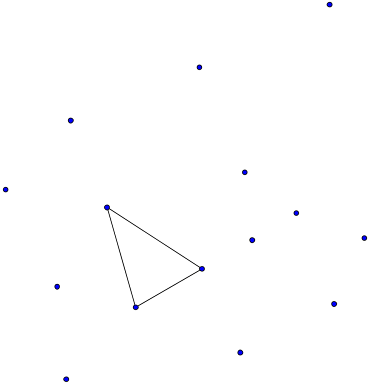
Triangulation de Delaunay



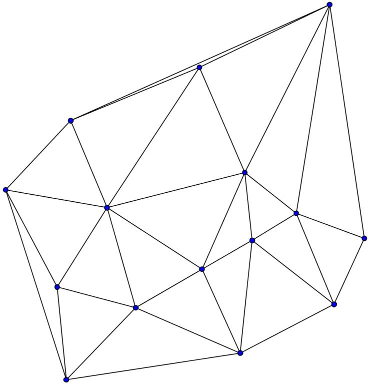
Triangulation de Delaunay



Triangulation de Delaunay



Triangulation de Delaunay



Triangulation de Delaunay

Triangulation de Delaunay

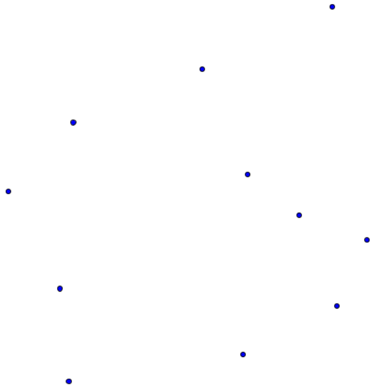
Se généralise en 3D

Alpha-shapes

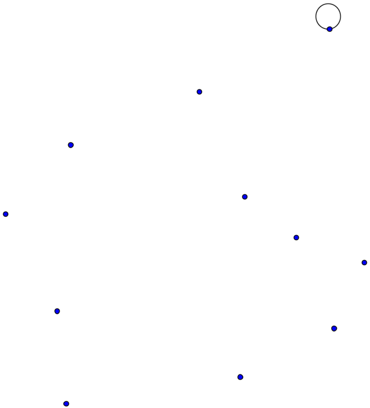
Définition

C'est une généralisation de l'enveloppe convexe.

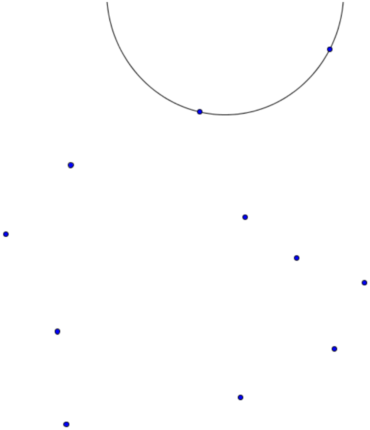
Alpha-shapes



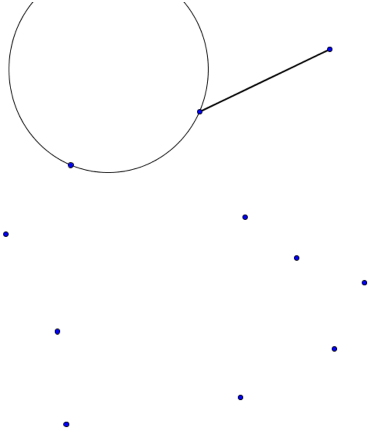
Alpha-shapes



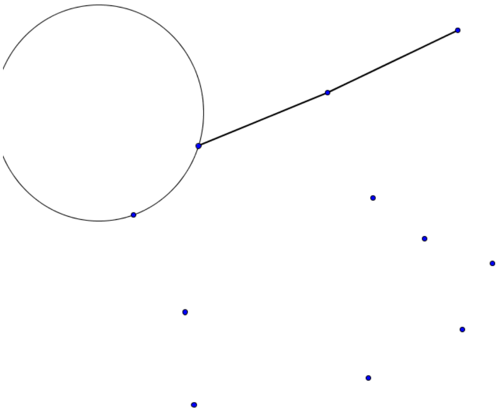
Alpha-shapes



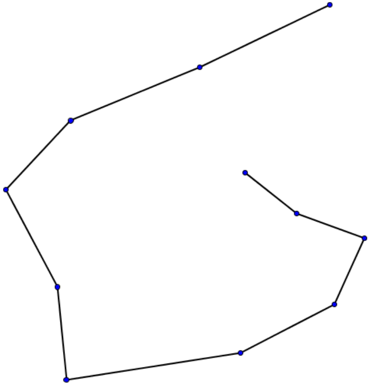
Alpha-shapes



Alpha-shapes



Alpha-shapes



Continuité géométrique

Soient Q_A et Q_B deux surfaces de Bézier de degrés n_A, m_A, n_B et m_B. On dit que :

Q_A et Q_B sont liées par un recollement C^0 si ces deux surfaces ont un bord commun.

Q_A et Q_B sont liées par un recollement C^k si ces deux surfaces ont toutes leurs dérivées partielles égales le long de la courbe commune.

Q_A et Q_B sont liées par un recollement G^1 si ces deux surfaces ont leurs plans tangents confondus.