Reconstruction de surface

Florent BRUNET

25 janvier 2008

CONSEIL RÉGIONAL AUVERGNE
LAIC
LASMEA
Université Blaise Pascal
UNIVERSITE D'AUVERGNE
TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Introduction

▶ **Problème adressé**

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

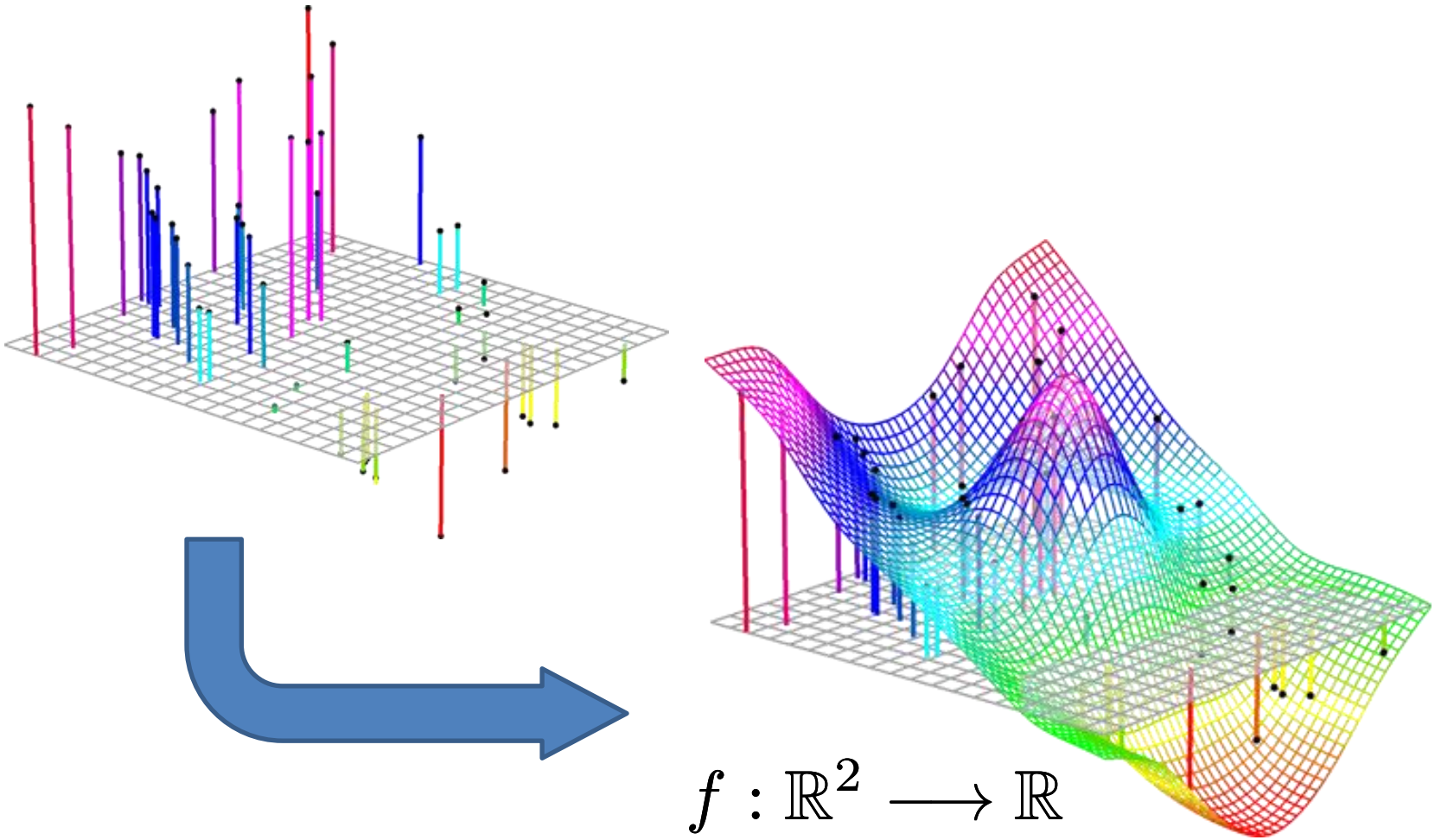
Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

Reconstruction de surface en 2.5D



$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Introduction

▶ A propos de la paramétrisation

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

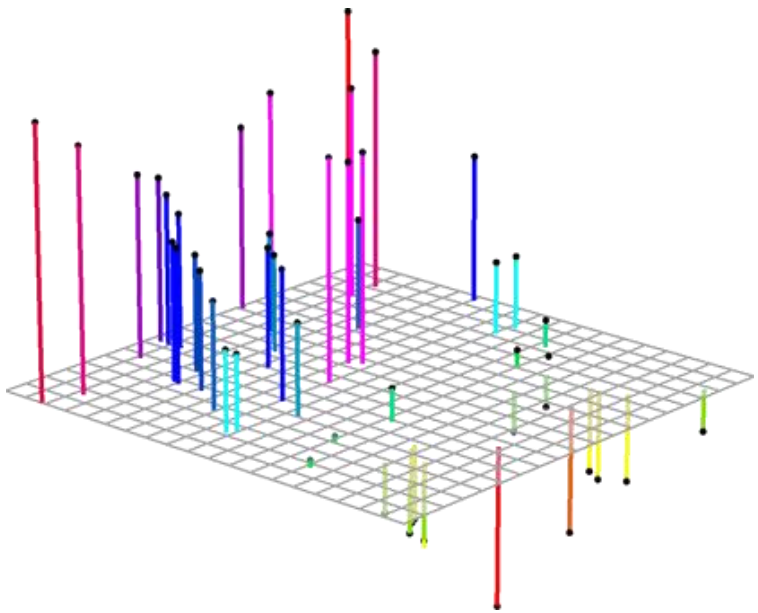
Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

En 2.5D, le problème de la paramétrisation ne se pose pas



$$M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Paramètre « naturel »

$$(x, y)$$

Introduction

▶ 2.5D et 3D

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

En faisant l'hypothèse d'une paramétrisation, on peut passer au cas 3D

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \end{array}$$

$$f_x, f_y, f_z : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Introduction

▶ Reconstruction régularisée

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

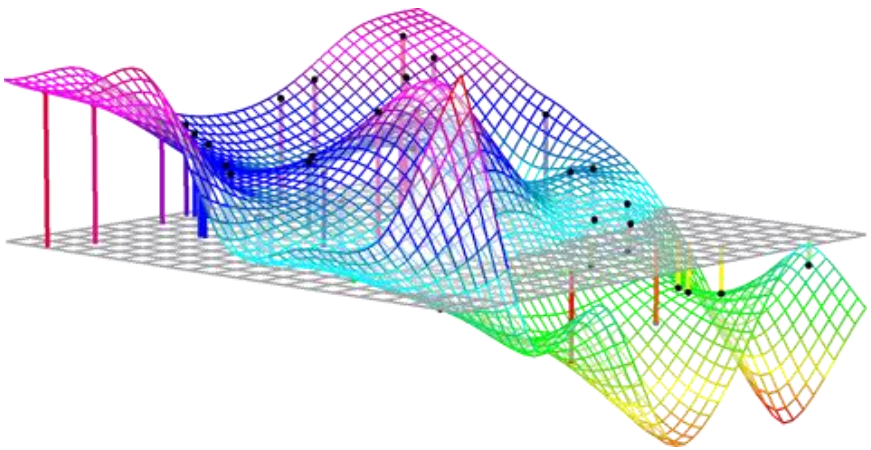
Modèles de surfaces

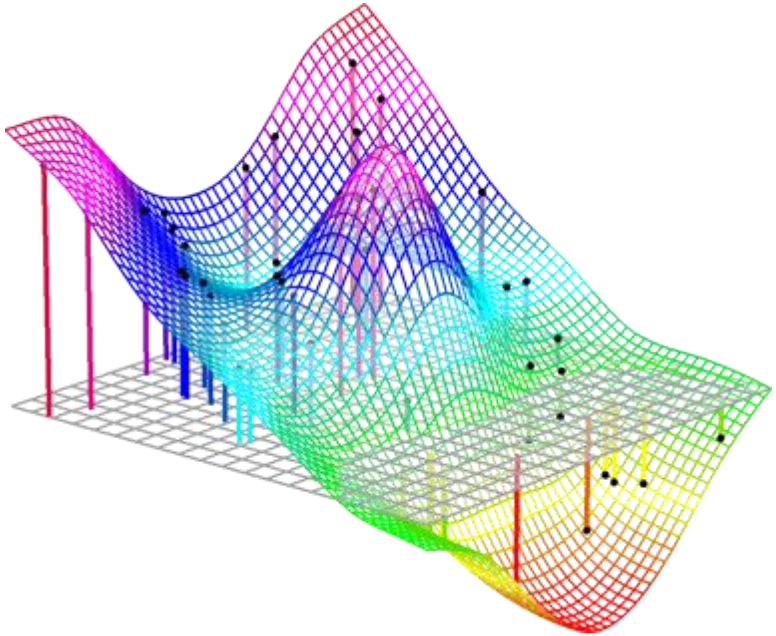
Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

On ne veut pas obligatoirement chercher la surface passant exactement par les points de données





On s'intéresse donc aussi à la « régularité » de la surface

Plan

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

- Notations et outils préliminaires
- Le problème initial
- Modèles de surfaces
- La régularisation
- Régularisation automatique
- Conclusion

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

- Notations et outils préliminaires
- Le problème initial
- Modèles de surfaces
- La régularisation
- Régularisation automatique
- Conclusion

Notations et outils préliminaires

▶ Les données

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

Données = points 3D définis par une élévation par rapport à un centre appartenant à un plan

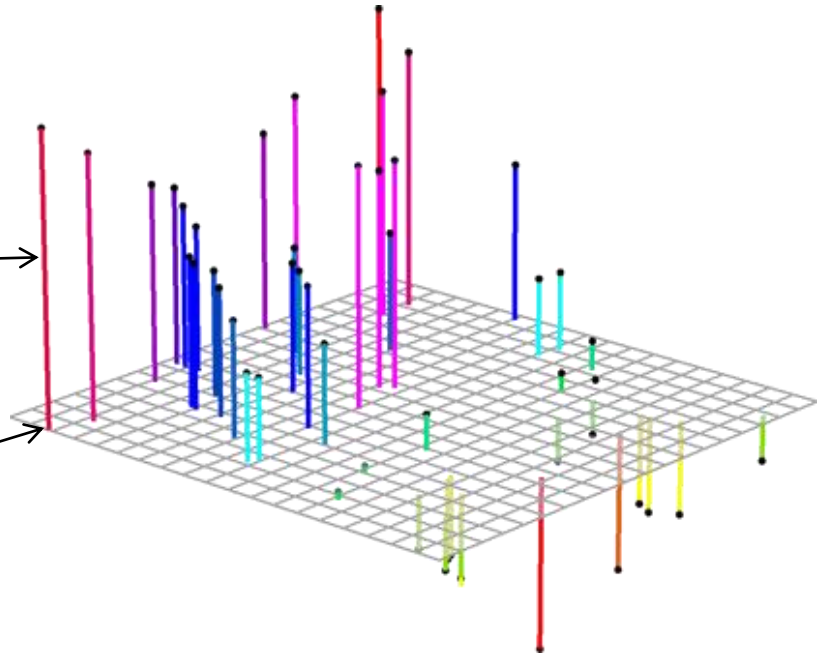
$$(\mathbf{x}_i \leftrightarrow y_i)_{i=1,\ldots,n}$$

$$\mathbf{x}_i \in [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$$

$$y_i \in \mathbb{R}$$

élévation y_i

centre $\mathbf{x}_i$



Notations et outils préliminaires

▶ La surface

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

Un modèle de surface est de la forme :

$$f(\mathbf{x};\mathbf{p}) : [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

où **p** est un vecteur contrôlant l'allure de la surface.

Par exemple, **p** peut contenir les points de contrôles d'une surface de Bézier.

La reconstruction de surface consiste généralement à déterminer le vecteur de paramètres (**p**) pour un modèle de fonction (*f*) fixé.

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

- Notations et outils préliminaires
- Le problème initial
- Modèles de surfaces
- La régularisation
- Régularisation automatique
- Conclusion

Le problème initial

▶ La reconstruction de surface en tant que problème de minimisation

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

La reconstruction de surface peut être vue comme un problème de minimisation

$$\mathbf{p}^* = \arg\min_{\mathbf{p}} \mathcal{E}_d(\mathbf{p})$$

Terme d'attache aux données

Surface reconstruite : $f(\mathbf{x}; \mathbf{p}^*)$

Le problème initial

▶ Termes d'attache aux données

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

Différents termes d'attache aux données sont envisageables.

L'erreur uniforme (norme infinie) :

$$\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) = \left\| \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}_1;\mathbf{p}) \\ \vdots \\ f(\mathbf{x}_n;\mathbf{p}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

La somme des résidus au carré (norme 2) :

$$\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\mathbf{x}_i;\mathbf{p}) - y_i\right)^2 = \frac{1}{n}\left\| \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}_1;\mathbf{p}) \\ \vdots \\ f(\mathbf{x}_n;\mathbf{p}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

Le problème initial

▶ Pourquoi utiliser la norme euclidienne ?

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

- La norme euclidienne a généralement un bon comportement pour un bruit gaussien

- De plus, si l'on a un modèle de surface linéaire en **p**, le problème de minimisation est facile à résoudre :

$$\mathbf{p}^* = \arg\min_{\mathbf{x}} \|A\mathbf{p} - Y\|_2^2 = A^\dagger Y$$

$$A^\dagger = \left(A^\mathsf{T} A\right)^{-1} A^\mathsf{T}$$

Le problème initial

▶ **Minimisation d'un problème de moindre carrés**

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \|A\mathbf{p} - Y\|_2^2 = 0$$

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{p} - Y\|_2^2 &= (A\mathbf{p} - Y)^\mathsf{T} (A\mathbf{p} - Y) \\ &= \mathbf{p}^\mathsf{T} A^\mathsf{T} A\mathbf{p} - 2\mathbf{p}^\mathsf{T} A^\mathsf{T} Y + Y^\mathsf{T} Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \|A\mathbf{p} - Y\|_2^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2A^\mathsf{T} A\mathbf{p} - 2A^\mathsf{T} Y = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & A^\mathsf{T} A\mathbf{p} = A^\mathsf{T} Y \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbf{p} = \left(A^\mathsf{T} A\right)^{-1} A^\mathsf{T} Y = A^\dagger Y\end{aligned}$$

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

- Notations et outils préliminaires
- Le problème initial
- Modèles de surfaces
- La régularisation
- Régularisation automatique
- Conclusion

Modèles de surfaces

▶ Fonctions à base radiale

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

Un ensemble de centres $c_1, \ldots, c_q \in \mathbb{R}^2$

Le vecteur de paramètres $\mathbf{p}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} p_1 & \ldots & p_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^q$

Une base radiale $\rho : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

Fonction à base radiale (RBF) $f(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{q} p_i \rho(d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i))$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i) = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|_2$$

Modèles de surfaces

▶ Fonctions à base radiale

Notations et outils préliminaires

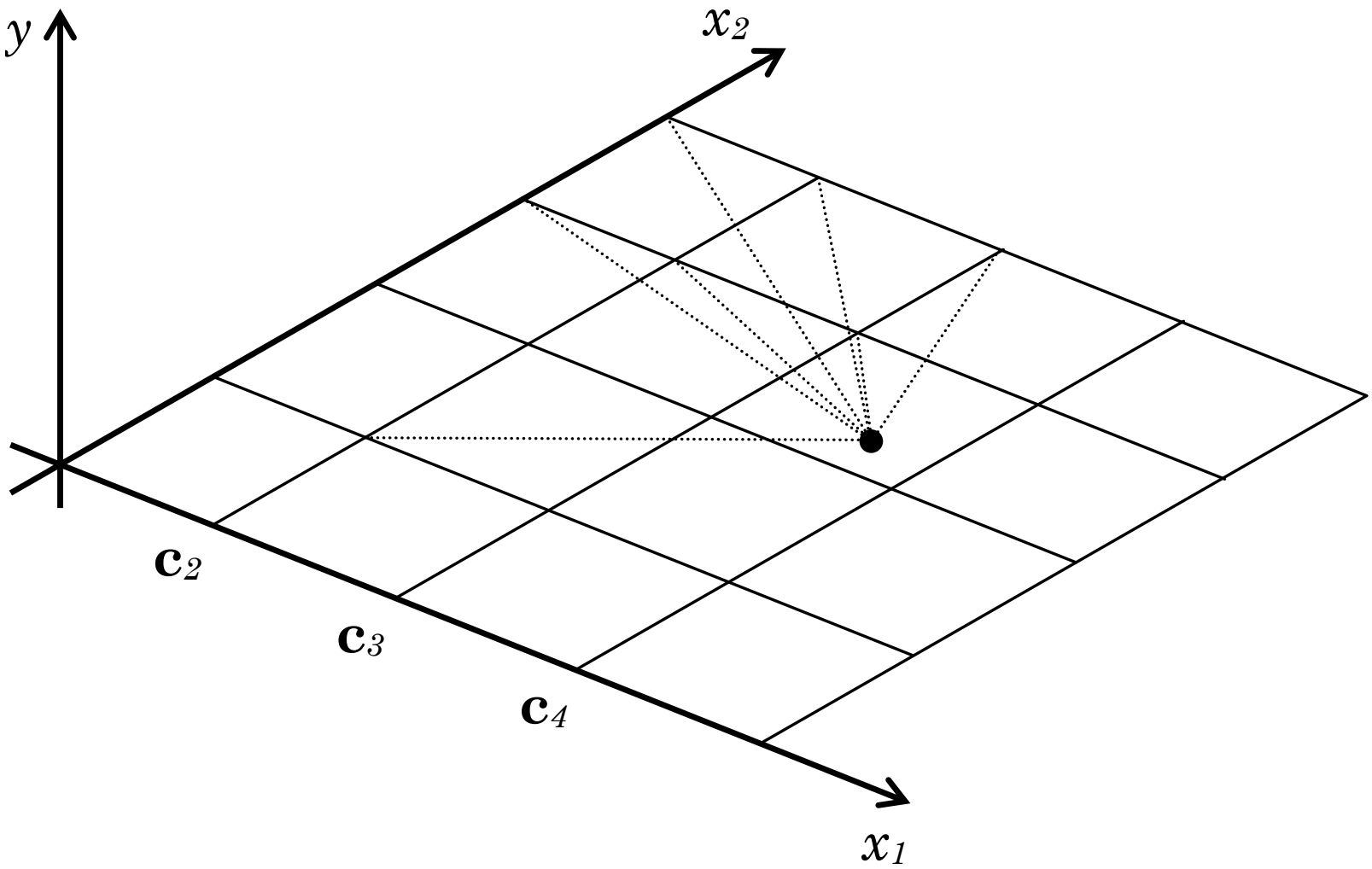
Le problème initial

▶ Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion



Modèles de surfaces

▶ Fonctions à base radiale

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

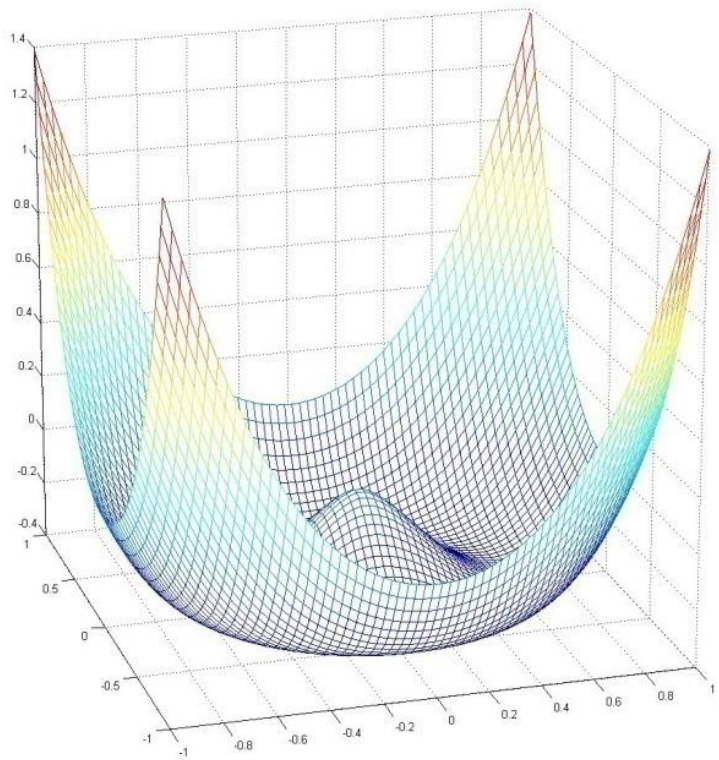
▶ Modèles de surfaces

Régularisation

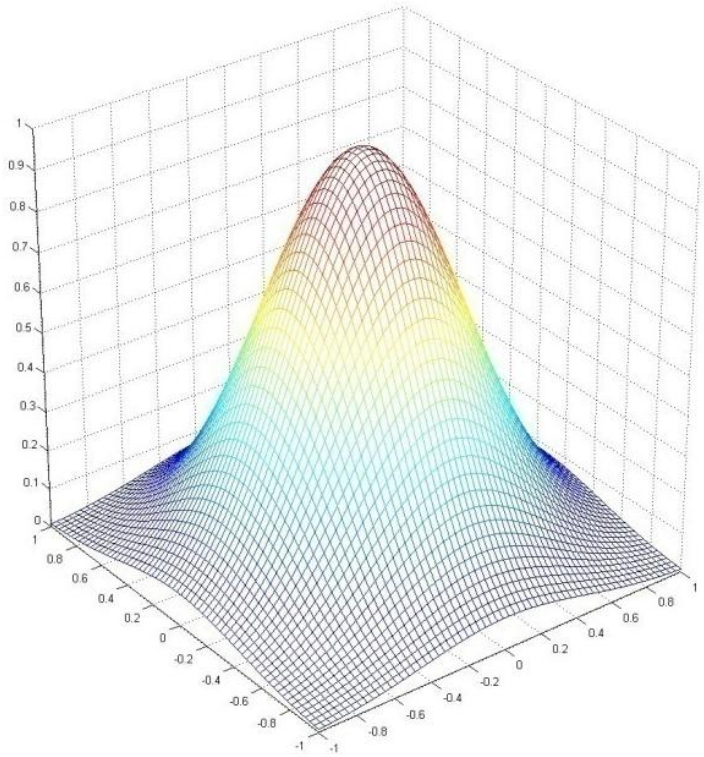
Régularisation automatique

Conclusion

$$\rho_{TPS}(r) = r^2 \log(r)$$



$$\rho_G(r) = \mathrm{e}^{-r^2}$$



Modèles de surfaces

▶ Fonctions à base radiale

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

▶ Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

Les fonctions à base radiales sont linéaires en **p**

$$f(\mathbf{x};\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{q} p_i \rho(d(\mathbf{x},\mathbf{c}_i))$$

$$\mathbf{l}_{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \rho(d(\mathbf{x},\mathbf{c}_1)) & \dots & \rho(d(\mathbf{x},\mathbf{c}_q)) \end{bmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{x};\mathbf{p}) = \mathbf{l}_{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{p}$$

$$\min_{\mathbf{p}} \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) \Rightarrow \min_{\mathbf{p}} \|A\mathbf{p} - Y\|_2^2$$

$$\Rightarrow \min_{\mathbf{p}} \left\| \begin{bmatrix} \rho(d(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_1)) & \dots & \rho(d(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_n)) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho(d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_1)) & \dots & \rho(d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_n)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

Modèles de surfaces

▶ B-splines

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

Rappel :

$$f(\mathbf{x};\mathbf{p}) = \sum_{i=-k}^{g} \sum_{j=-l}^{h} p_{(i+k)(h+l+1)+j+1} N_{i,k+1}(x_1) N_{j,l+1}(x_2)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Dans ce cas, le vecteur des paramètres **p** contient l'ensemble des points de contrôle de la surface :

$$\mathbf{p}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_{(g+k+1)(h+l+1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(g+k+1)(h+l+1)}$$

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

- Notations et outils préliminaires
- Le problème initial
- Modèles de surfaces
- La régularisation
- Régularisation automatique
- Conclusion

La régularisation

▶ Motivations

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

Si l'on ne considère que l'attache aux données

$$\mathbf{p}^* = \arg\min_{\mathbf{p}} \mathcal{E}_d(\mathbf{p})$$

plusieurs problèmes peuvent se poser...

La régularisation

▶ Motivations

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

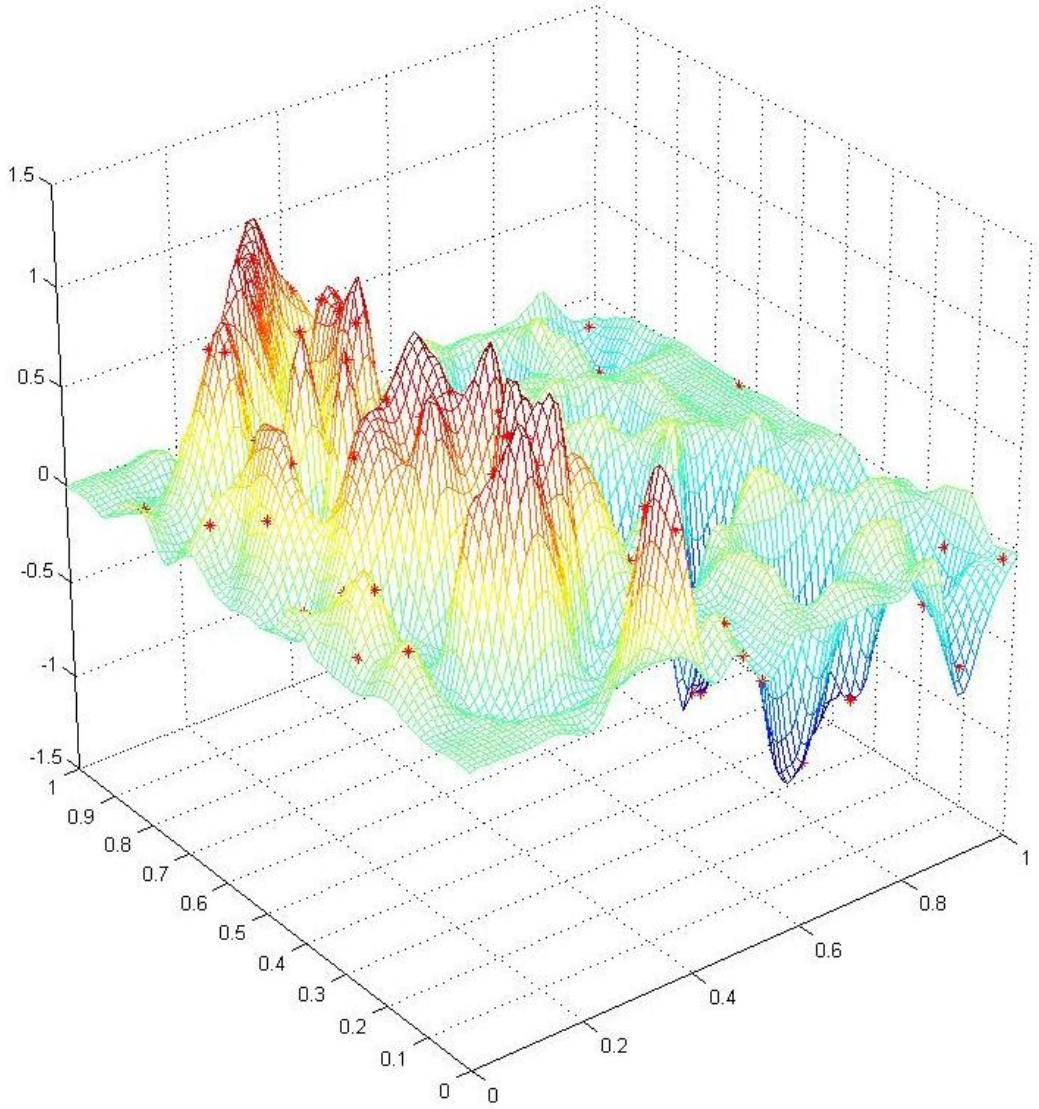
Modèles de surfaces

▶ Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

Les données peuvent être bruitées



La régularisation

▶ Motivations

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

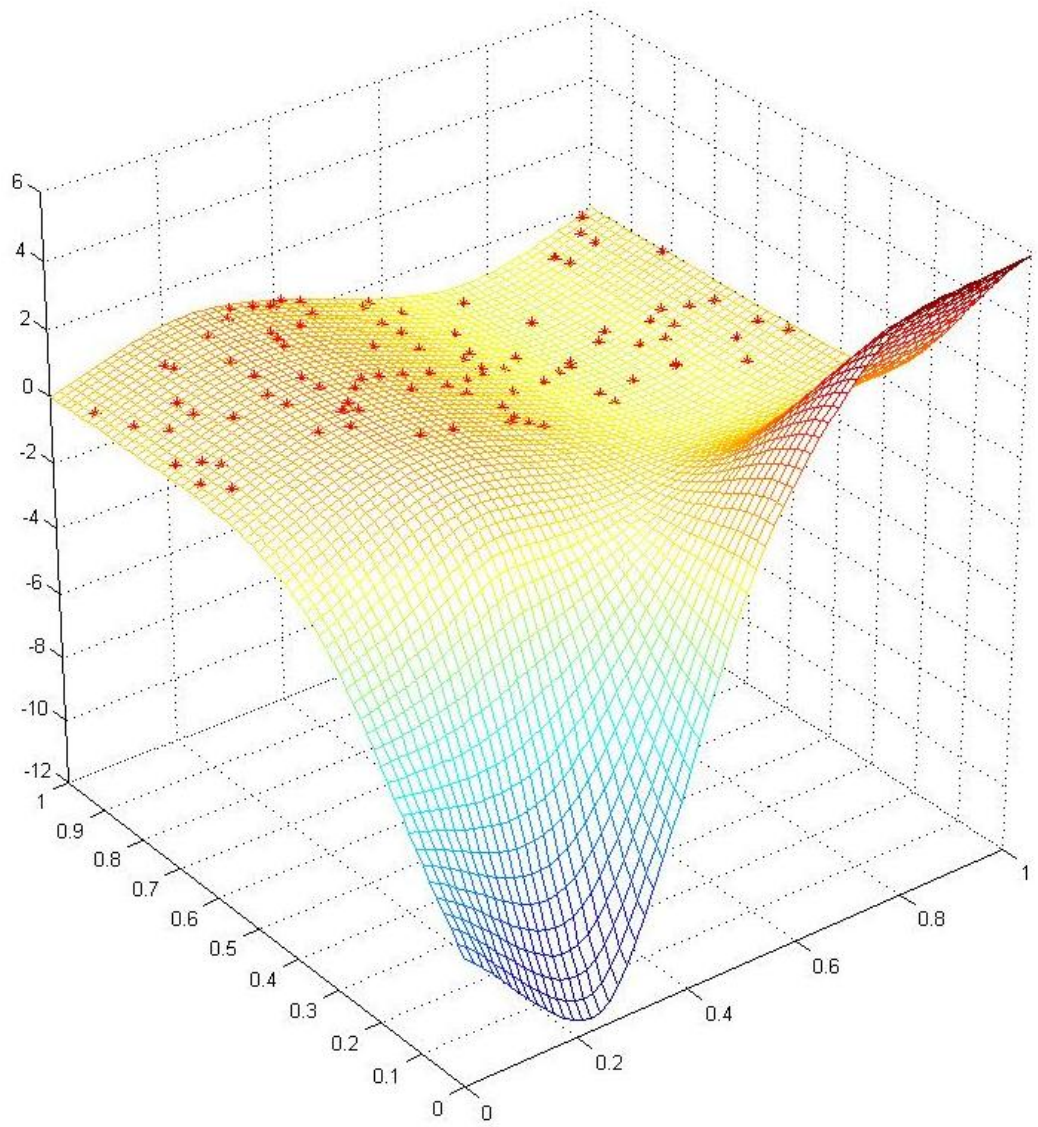
Modèles de surfaces

▶ Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

Certaines zones peuvent être mal contraintes



La régularisation

▶ Modification du problème

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
▶ Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

$$\mathbf{p}^* = \arg\min_{\mathbf{p}} \mathcal{E}_d(\mathbf{p})$$

On remédie à ce problème en introduisant un ***terme de régularisation***

$$\mathcal{E}_r(\mathbf{p})$$

$$\mathbf{p}^* = \arg\min_{\mathbf{p}} \left(\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \lambda \mathcal{E}_r(\mathbf{p})\right)$$

$$\lambda \in [0, \infty[$$

La régularisation

▶ Compromis attache aux données / régularisation

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

Modèles de surfaces

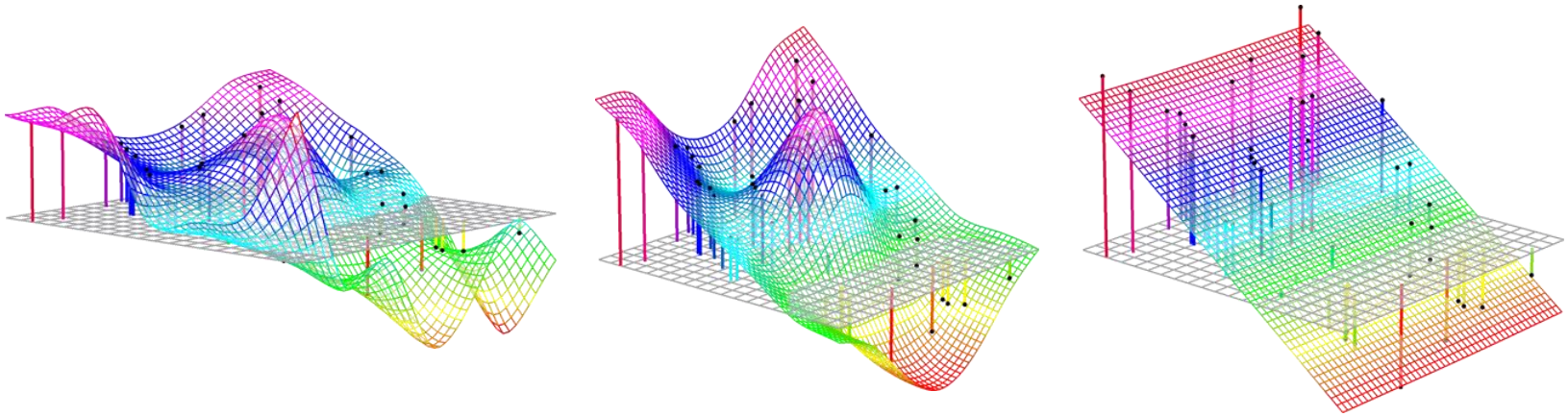
▶ Régularisation

Régularisation automatique

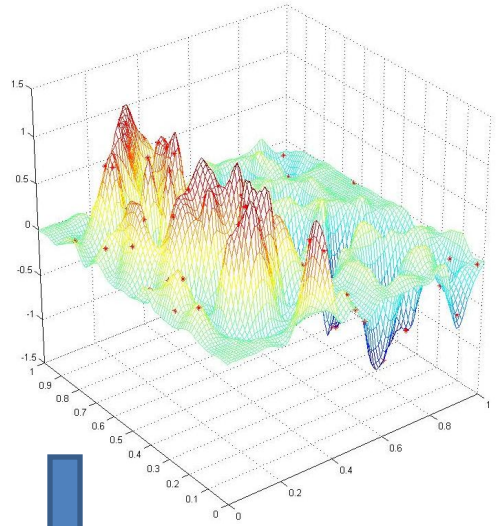
Conclusion

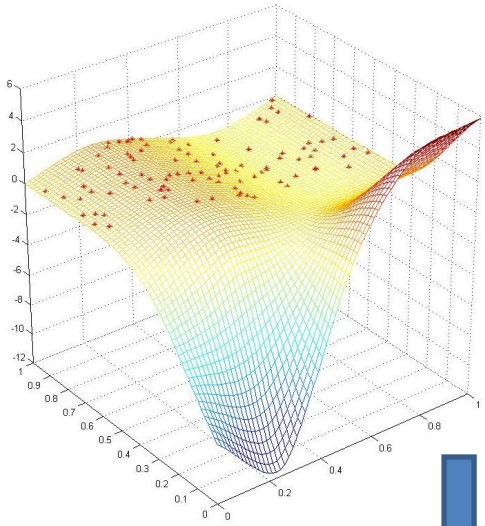
$$\mathbf{p}^* = \arg\min_{\mathbf{p}} \left(\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \lambda \mathcal{E}_r(\mathbf{p})\right) \qquad \lambda \in [0, \infty[$$

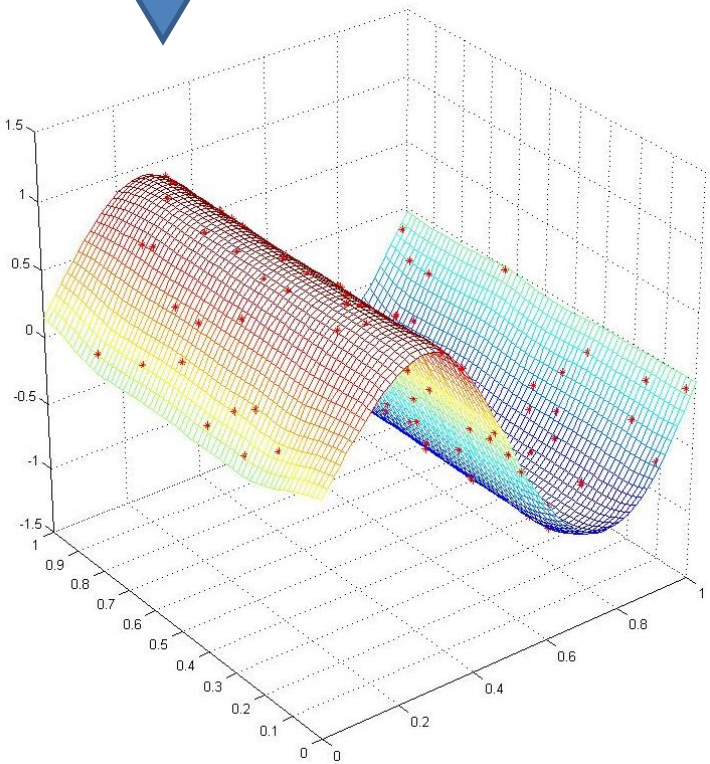
Le paramètre λ contrôle le compromis entre l'attache aux données et la régularisation

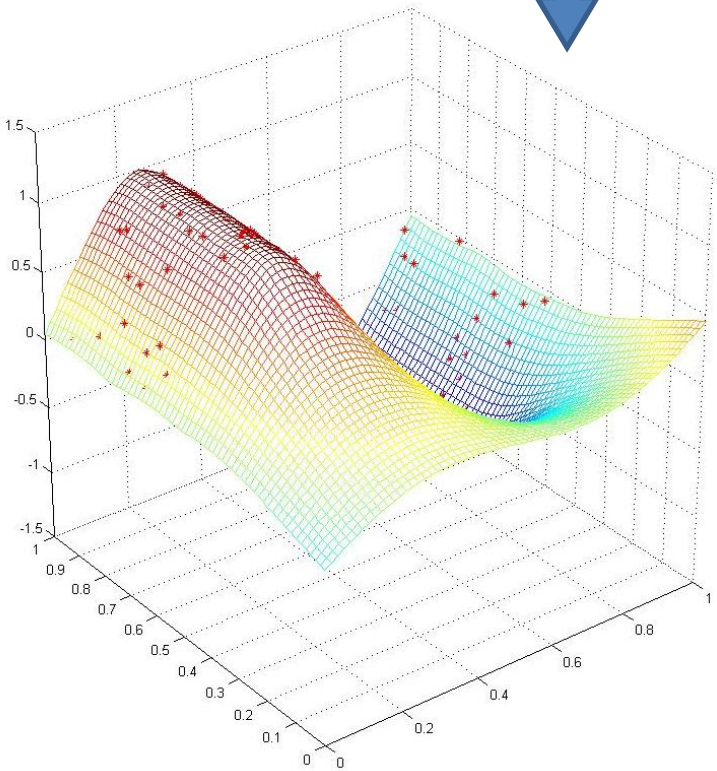


$\lambda = 0.0002$ $\lambda = 0.005$ $\lambda = 5$


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
1 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1


6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
1 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
1 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
1 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1

La régularisation

▶ L'énergie de torsion

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

L'***énergie de torsion*** est souvent utilisée comme terme de régularisation

$$\mathcal{E}_r(\mathbf{p}) = \iint_{\mathbf{t}\in[0,1]^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{t};\mathbf{p}) \right)^2 \mathrm{d}\mathbf{t}$$

La régularisation

▶ Incorporation au problème de minimisation (1/3)

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

Modèles de surfaces

▶ Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

$$\mathcal{E}_r(\mathbf{p}) = \iint_{\mathbf{t}\in[0,1]^2} \phi(t_1, t_2; \mathbf{p}) \mathrm{d}\mathbf{t}$$

Discrétisation

$$\mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \approx \frac{1}{NM} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \phi\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{M}; \mathbf{p}\right)$$

Linéarité par rapport à **p**

$$\mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \approx \|R\mathbf{p}\|_2^2$$

La régularisation

▶ Incorporation au problème de minimisation (2/3)

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

Modèles de surfaces

▶ Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

$$\min_{\mathbf{p}} \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \lambda \mathcal{E}_r(\mathbf{p})$$

$$\min_{\mathbf{p}} \|A\mathbf{p} - Y\|_2^2 + \lambda \|R\mathbf{p}\|_2^2$$

$$\min_{\mathbf{p}} \left\| \begin{bmatrix} A \\ \lambda R \end{bmatrix} \mathbf{p} - \begin{bmatrix} Y \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

La régularisation

▶ Incorporation au problème de minimisation (3/3)

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
▶ Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

Dans le cas des RBF, l'énergie de torsion prend une forme bien particulière et on peut se ramener au problème :

$$\min_{\mathbf{p}} \|(A + \lambda I)\mathbf{p} - Y\|_2^2$$

La régularisation

▶ Remarque

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

Il est possible de contrôler la régularité d'une surface par d'autres approches :

- Nombre de centres (RBF)
- Nombre de points de contrôle (Bézier, B-spline)
- Degré de la surface
- Vecteur nodal (B-spline)

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

- Notations et outils préliminaires
- Le problème initial
- Modèles de surfaces
- La régularisation
- Régularisation automatique
- Conclusion

Régularisation automatique

▶ Quel est le problème ?

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

$$\min_{\mathbf{p}} \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \lambda \mathcal{E}_r(\mathbf{p})$$

Comment choisir λ ?

Régularisation automatique

▶ Une mauvaise approche

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

On pourrait essayer d'optimiser simultanément sur **p** et λ :

$$\min_{\mathbf{p}} \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \lambda \mathcal{E}_r(\mathbf{p})$$

$$\min_{\mathbf{p},\lambda} \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \lambda \mathcal{E}_r(\mathbf{p})$$

MAIS...

Régularisation automatique

▶ Une mauvaise approche

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

On pourrait essayer d'optimiser simultanément sur **p** et λ :

$$\min_{\mathbf{p}} \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \lambda \mathcal{E}_r(\mathbf{p})$$

$$\min_{\mathbf{p},\lambda} \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \lambda \mathcal{E}_r(\mathbf{p})$$

MAIS...

$$\arg\min_{\mathbf{p},\lambda} \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \lambda \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) = \arg\min_{\mathbf{p}} \mathcal{E}_d(\mathbf{p})$$

Régularisation automatique

▶ Avant-propos

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

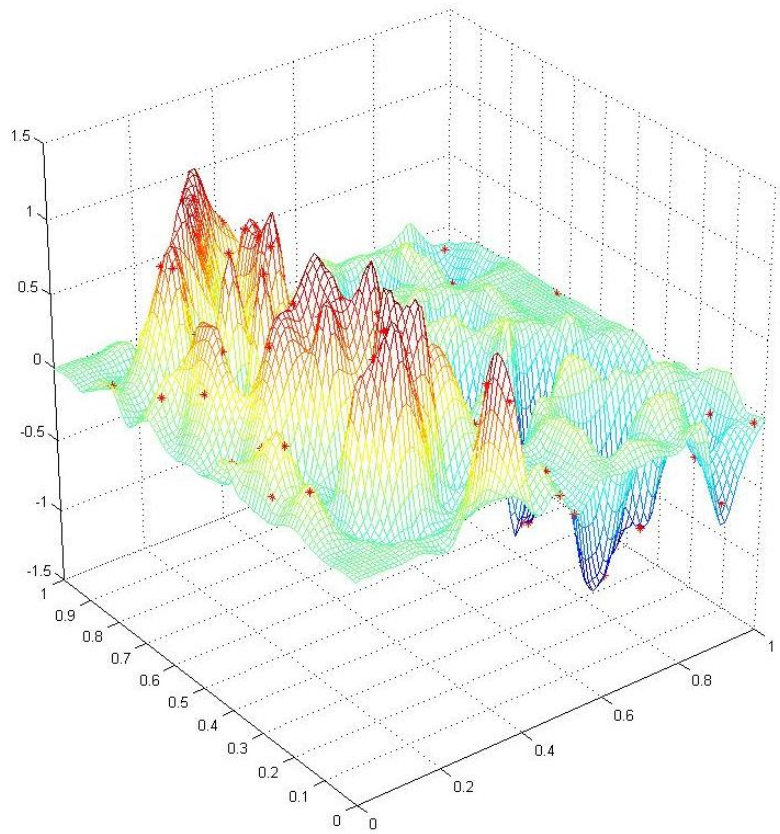
Modèles de surfaces

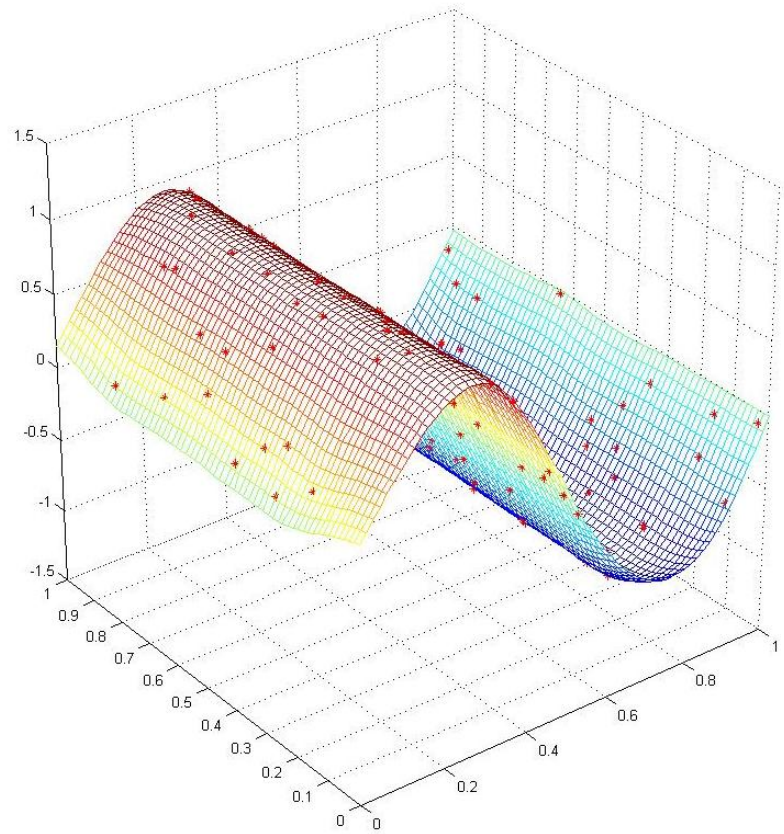
Régularisation

▶ Régularisation automatique

Conclusion

La capacité d'une surface à ***généraliser*** est une bonne mesure de la qualité de cette surface.





Régularisation automatique

▶ La validation croisée

Notations et outils préliminaires

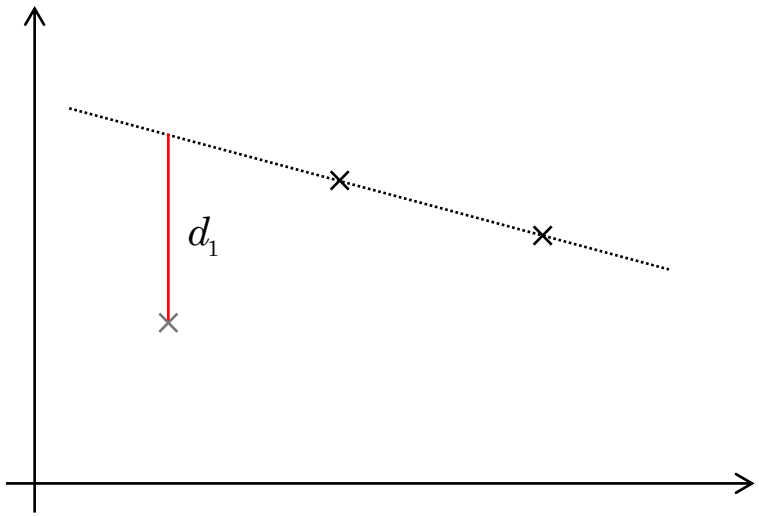
Le problème initial

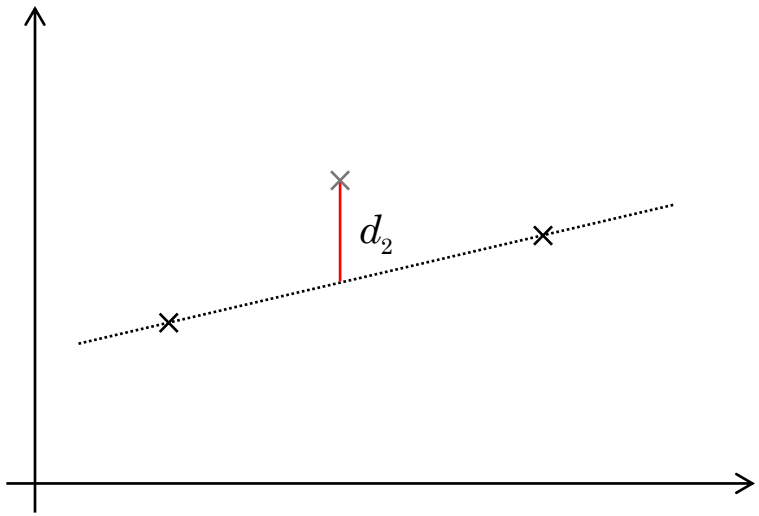
Modèles de surfaces

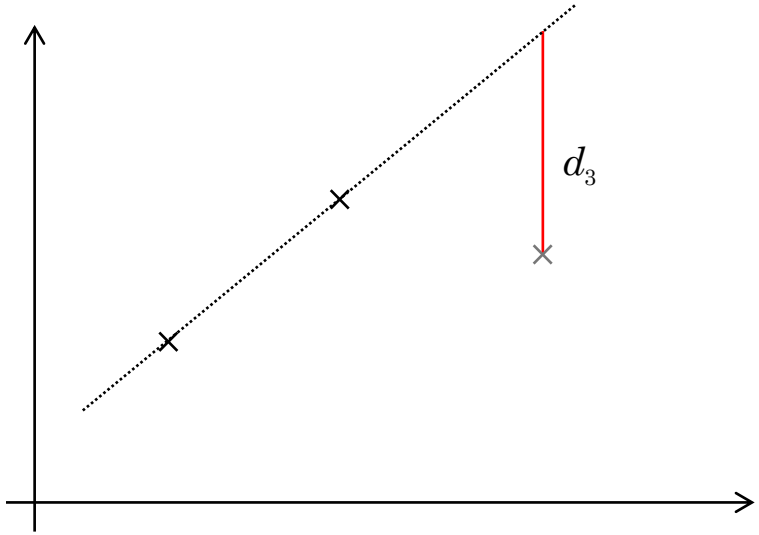
Régularisation

▶ Régularisation automatique

Conclusion







$$\mathrm{OCV}(\lambda) = d_1 + d_2 + d_3$$

Régularisation automatique

▶ La validation croisée

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

Modèles de surfaces

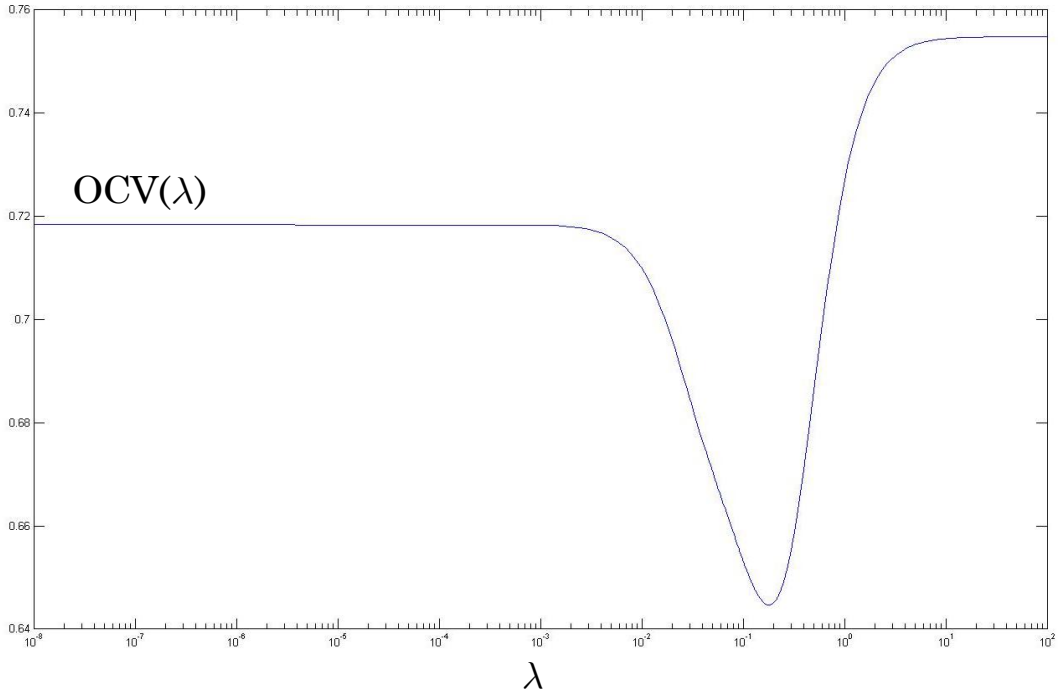
Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

$$OCV(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(f^{[i]}(\mathbf{x}_i; \mathbf{p}^*) - y_i \right)^2$$

$f^{[i]}(\cdot; \mathbf{p}^*)$: surface reconstruite en omettant le *i*-ème point



Régularisation automatique

▶ Nouveau schéma

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

Conclusion

$$\begin{cases} \mathbf{p}^* = \arg\min_{\mathbf{p}} \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \lambda \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \\ \text{pour } \lambda \in [0, \infty[\text{ fixé} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\lambda} = \arg\min_{\lambda} OCV(\lambda) \\ \mathbf{p}^* = \arg\min_{\mathbf{p}} \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \hat{\lambda} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \end{cases}$$

Régularisation automatique

▶ Inconvénients de la validation croisée

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

Le score de validation croisée peut être très coûteux en temps de calcul :

$$OCV(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(f^{[i]}(\mathbf{x}_i; \mathbf{p}^*) - y_i \right)^2 \Rightarrow O(n^4)$$

Il existe cependant des optimisations :

- $$OCV(\lambda) = \frac{\frac{1}{n}\|(I - AA^\dagger)Y\|^2}{\frac{1}{n}\mathrm{tr}(I - AA^\dagger)} \Rightarrow O(n^3)$$
- Matrices creuses

Notations et outils préliminaires
Le problème initial
Modèles de surfaces
Régularisation
Régularisation automatique
Conclusion

- Notations et outils préliminaires
- Le problème initial
- Modèles de surfaces
- La régularisation
- Régularisation automatique
- Conclusion

Conclusion

▶ Le Puy Pariou

Notations et outils préliminaires

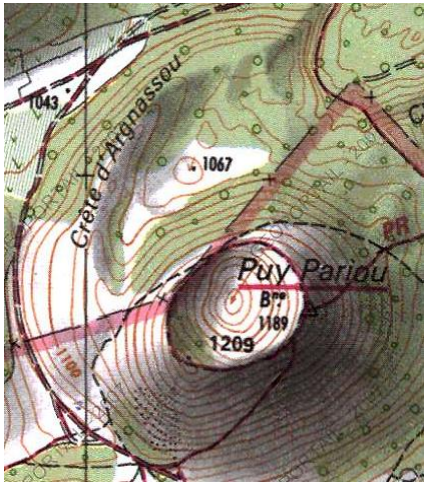
Le problème initial

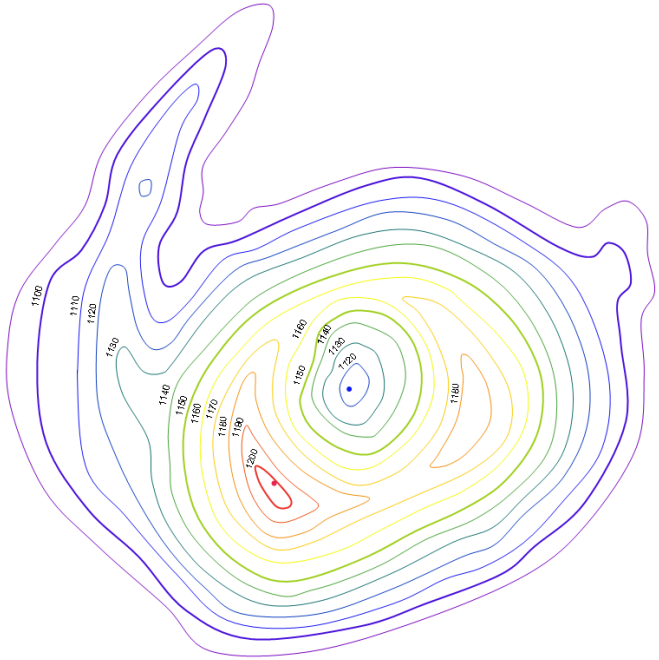
Modèles de surfaces

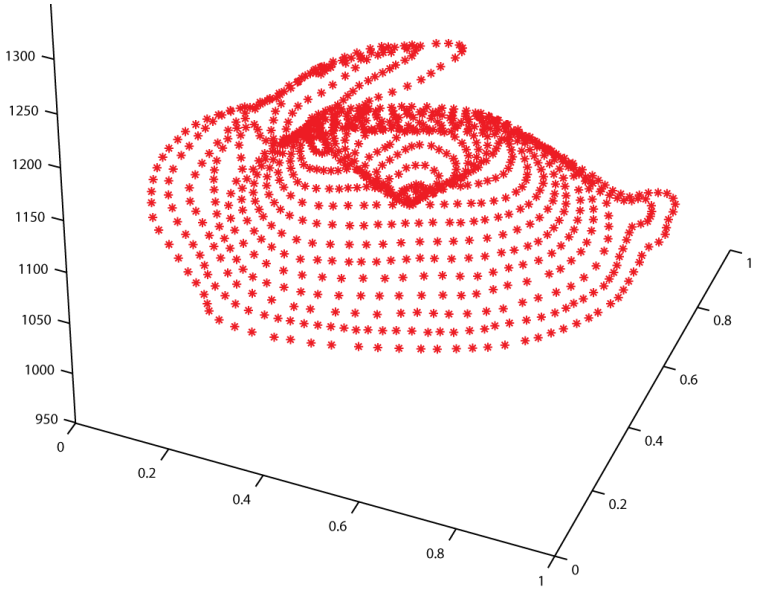
Régularisation

Régularisation automatique

▶ Conclusion







Conclusion

▶ Le Puy Pariou

Notations et outils préliminaires

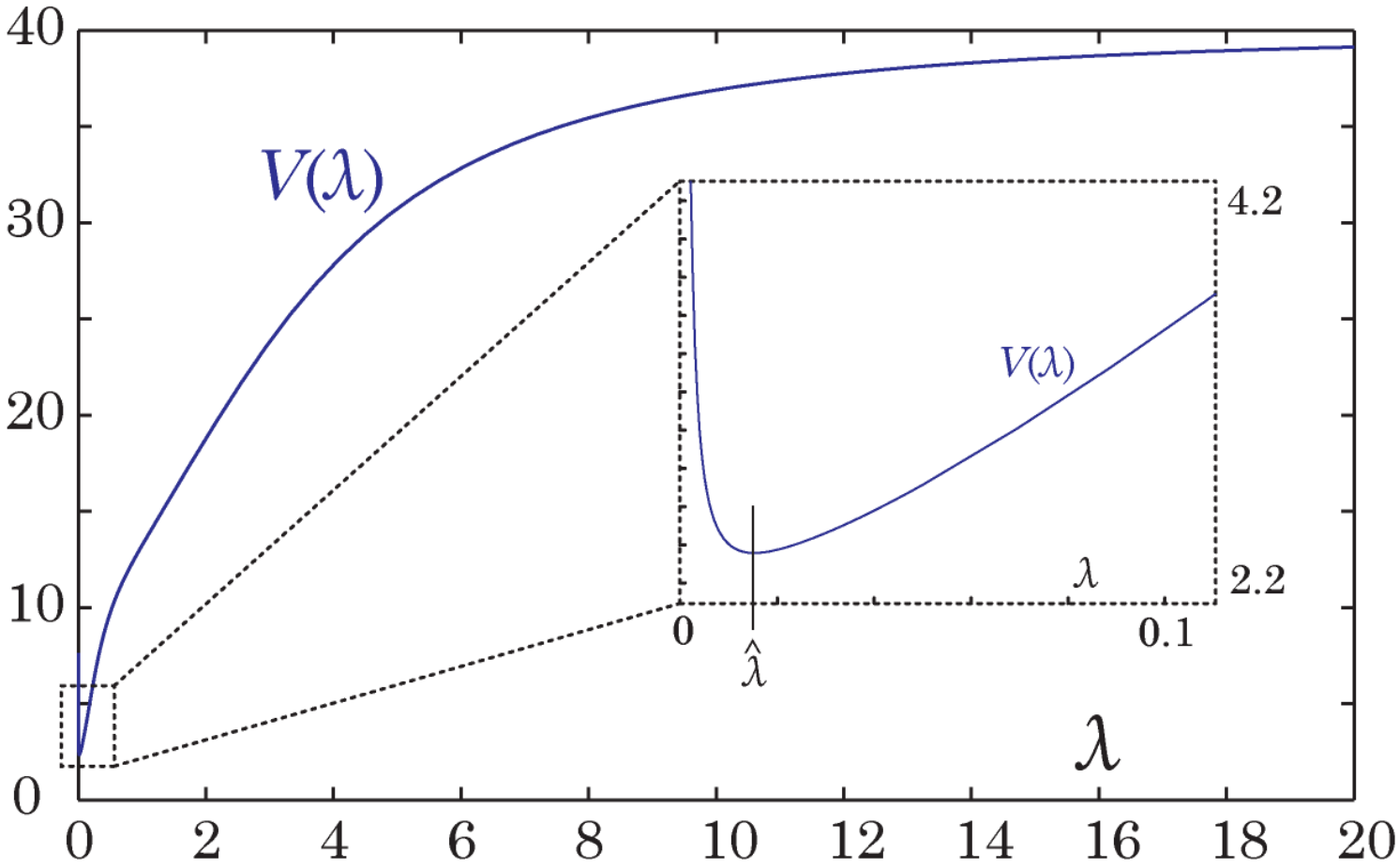
Le problème initial

Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

▶ Conclusion



Conclusion

▶ Le Puy Pariou

Notations et outils préliminaires

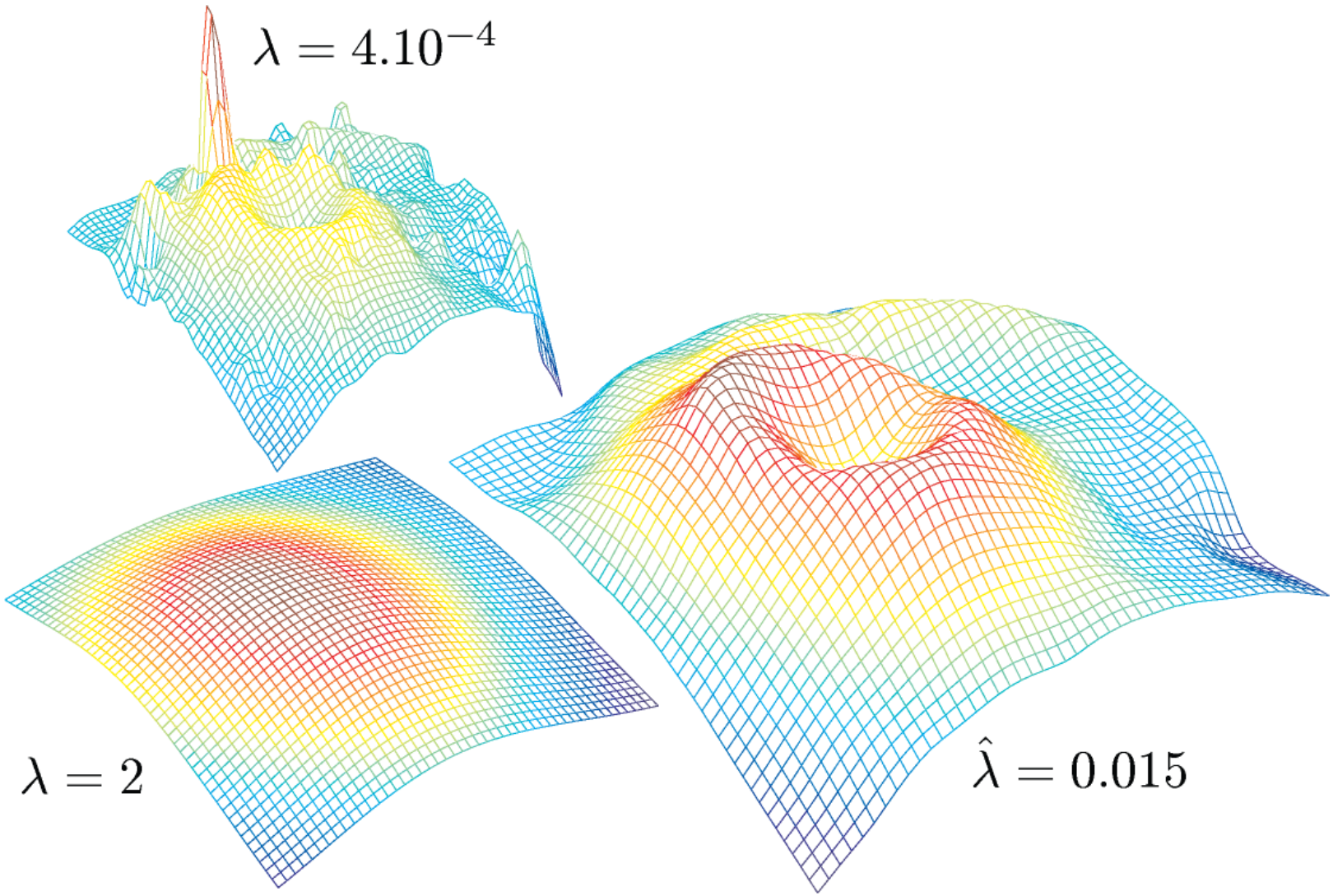
Le problème initial

Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

▶ Conclusion



Conclusion

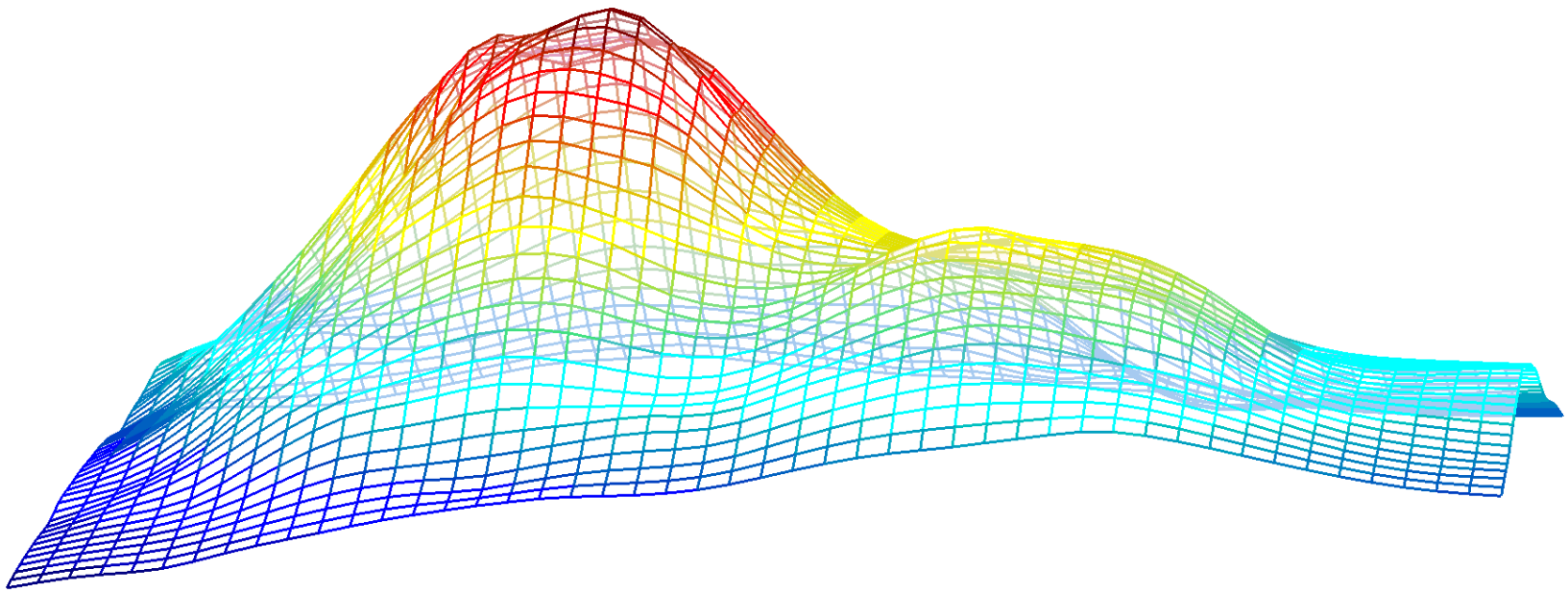
▶ Le Puy de Dôme

Notations et outils préliminaires

Le problème initial

Modèles de surfaces

Régularisation

Régularisation automatique

▶ Conclusion