Reconstruction de surfaces paramétrées à l'aide d'un programme linéaire

Thibault Marzais

LLAIC
IUT département Informatique BP 86
63173 AUBIÈRE CEDEX
marzais@llaic3.u-clermont1.fr

14 Octobre 2005

Introduction

Modélisation géométrique

Représenter des objets dans une machine
Plusieurs types de représentations

Introduction

Modélisation géométrique

Représenter des objets dans une machine
Plusieurs types de représentations

Objet modélisé par

- un nuage de points
- un ensemble de voxels
- un ensemble de facettes triangulaires
- une surface paramétrée (Bézier, B-Spline)

$\downarrow$ degré de difficulté

Introduction

Problème récurrent en modélisation géométrique

Passer d'une représentation à une autre

Introduction

Problème récurrent en modélisation géométrique

Passer d'une représentation à une autre

Exemple

Relevé de la profondeur du fond marin à l'aide d'un sonar
Comment représenter le fond marin?

Plan

Objectif : Avant

Données

Des points $M_k = \{x_k, y_k, z_k\}$

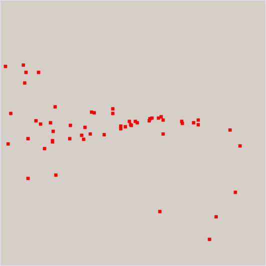

Figure: Points dans l'espace

Objectif : Après

Résultat

Les points M_k et une surface S (surface paramétrée)

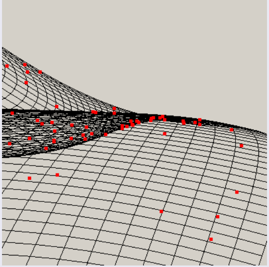

Figure: Points dans l'espace et la surface reconstruite

Définition de surfaces paramétrées

- Une surface paramétrée est de cette forme :

$$Q : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$$

- En pratique, nous utiliserons :

$$Q(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i f_i(s,t)$$

avec

- Base de fonctions $f_i : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$
- Points de contrôles $P_i \in \mathbb{R}^3$

Surfaces de Bézier

Une surface de Bézier est une surface paramétrée.
La base de fonction utilisée est le produit tensoriel des polynômes de Bernstein, définis sur [0,1]:

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} * t^i * (1-t)^{n-i}$$

Formulation d'une surface de Bézier de degre n,m

$$Q(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{i,j} B_{i,n}(s) B_{j,m}(t)$$

Surfaces B-Splines - 1/3

- Soient k et l deux entiers (degré de la surface).
- Soient m et n deux entiers (ordre de la surface).
- Soient $S = \{s_0, \ldots, s_{m+k-1}\}$, $T = \{t_0, \ldots, t_{n+l-1}\}$ deux vecteurs nodaux, avec $s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_{m+k-1}$, $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n+l-1}$.

Surfaces B-Splines - 2/3

- Une surface B-Spline est une surface paramétrée avec comme base de fonction le produit tensoriel des fonctions de Cox de Boor:

$$\begin{cases} N_{i,r}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+r-1}-t_i} N_{i,r-1}(t) + \frac{t_{i+r}-t}{t_{i+r}-t_{i+1}} N_{i+1,r-1}(t) \\ N_{i,1}(t) = 1 \text{ si } t_i \leq t \leq t_{i+1} \text{ et } (i = 0 \text{ ou } t \neq t_i) \\ N_{i,1}(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- Les fonctions $N_{i,r}(t)$ sont polynomiales par morceaux à support compact

Surfaces B-Splines - 3/3

Formulation d'une surface B-Spline d'ordre m,n de degré k,l

$$
\begin{array}{rccl}
Q: & [s_{k-1}, s_m] \times [t_{l-1}, t_n] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 & (s,t) & \longmapsto & Q(s,t) \\
 & & & = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} P_{i,j} N_{i,k}(s) N_{j,l}(t)
\end{array}
$$

Remarque

Une surface B-Spline offre un contrôle local.

Un programme linéaire

Définition

- Un programme linéaire est un problème que l'on met sous la forme suivante :

$$\begin{gathered} Min(\text{fonction de coût linéaire}) \\ \text{sous contraintes linéaires} \end{gathered}$$

Un programme linéaire

Définition

- Un programme linéaire est un problème que l'on met sous la forme suivante :

$$\begin{gathered} Min(\text{fonction de coût linéaire}) \\ \text{sous contraintes linéaires} \end{gathered}$$

- Exemple

$$\begin{gathered} \underset{x}{Min}\,(c * x) \\ A * x \leq B \end{gathered}$$

Reconstruction de surfaces paramétrées

$$Q(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i f_i(s,t)$$

Formalisme

- On recherche une surface paramétrée Q qui approche tous les points M_k.

Reconstruction de surfaces paramétrées

$$Q(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i f_i(s,t)$$

Formalisme

- Avec une base de fonction donnée, on recherche donc des points de contrôles

Reconstruction de surfaces paramétrées

$$Q(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i f_i(s,t)$$

Formalisme

- On recherche une surface paramétrée Q qui approche tous les points M_k.
- Avec une base de fonction donnée, on recherche donc des points de contrôles
- $\forall k\ \exists s_k, t_k$ tq $Q(s_k, t_k) = M_k$

Reconstruction de surfaces paramétrées

$$Q(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i f_i(s,t)$$

Formalisme

- On recherche une surface paramétrée Q qui approche tous les points M_k.
- Avec une base de fonction donnée, on recherche donc des points de contrôles
- $\forall k \; \exists s_k, t_k$ tq $Q(s_k, t_k) = M_k$
- besoin des paramètres s_k et t_k pour chaque point M_k

Reconstruction de surfaces paramétrées

$$Q(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i f_i(s,t)$$

Formalisme

- $\forall k \ \exists s_k, t_k$ tq $Q(s_k, t_k) = M_k$
- besoin des paramètres s_k et t_k pour chaque point M_k
- problème de grande ampleur, on va supposer par la suite qu'on a s_k et t_k

Ecriture du système

$$Q(s_k, t_k) = \sum_{i=1}^{n} P_i f_i(s_k, t_k) = M_k \quad \forall k$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} P_i^x f_i(s_k, t_k) &= x_k \quad \forall k \\
\sum_{i=1}^{n} P_i^y f_i(s_k, t_k) &= y_k \quad \forall k \\
\sum_{i=1}^{n} P_i^z f_i(s_k, t_k) &= z_k \quad \forall k
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
A * P^x &= X \\
A * P^y &= Y \\
A * P^z &= Z
\end{aligned}$$

Il suffit de résoudre les trois systèmes pour trouver la surface

Prenons un de ces systèmes : $A * P^x = X$
En général, pas de solution exacte.

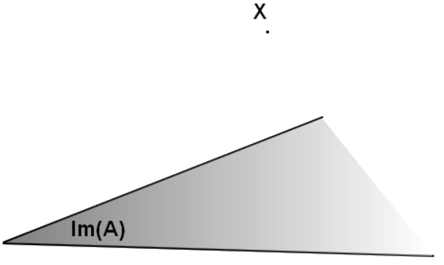

Figure: Pas de solution

Erreur E^x de reconstruction

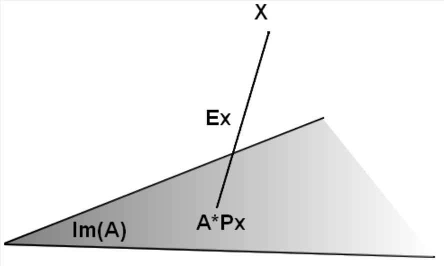

Figure: Erreur de reconstruction

Résolution du système par moindres carrés

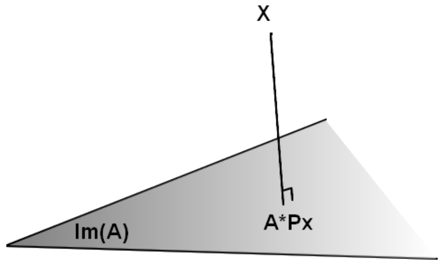

Figure: Reconstruction par moindre carrés

On minimise la norme euclidienne de E^x
Projection orthogonale de X sur $Im(A)$

Notre approche : Approche uniforme

Inconvénients des moindres carrés

- Un point lointain d'un groupe de points peut être considéré comme du bruit

Notre approche : Approche uniforme

Inconvénients des moindres carrés

- Un point lointain d'un groupe de points peut être considéré comme du bruit
- Exemple : Excroissance

Notre approche : Approche uniforme

Inconvénients des moindres carrés

- Un point lointain d'un groupe de points peut être considéré comme du bruit
- Exemple : Excroissance

Approche uniforme

Au lieu de minimiser la norme euclidienne de la différence $E^x = A * P^x - X$, on minimise sa norme infinie :

$$\underset{P^x}{Min} \left(||E^x||_\infty \right)$$

Vers le programme linéaire

$$\left\{ \underset{P^x}{Min}\left(\|E^x\|_\infty\right) \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \underset{P^x}{Min}\left(\underset{i}{Max}|E_i^x| \right) \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underset{P^x,h}{Min}(h) \\ -h \leq E_i^x \leq +h \ \ \forall i \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underset{P^x,h}{Min}(h) \\ -h * \mathbb{1} \leq A * P^x - X \leq h * \mathbb{1} \end{array} \right.$$

Vers le programme linéaire

$$\iff \begin{cases} \underset{P^x,h}{Min}(h) \\ A * P^x - X \geq -h * \mathbb{1} \\ A * P^x - X \leq h * \mathbb{1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \underset{P^x,h}{Min}(h) \\ A * P^x + h * \mathbb{1} \geq X \\ A * P^x - h * \mathbb{1} \leq X \end{cases}$$

Cette dernière forme est un programme linéaire.

Tests

Génération de surfaces aléatoires

- surface de Bézier
- surface B-Spline
- sphère

Tests

Génération de surfaces aléatoires

- surface de Bézier
- surface B-Spline
- sphère

Perturbation

- points M_k
- paramètres s_k, t_k

Perturbation

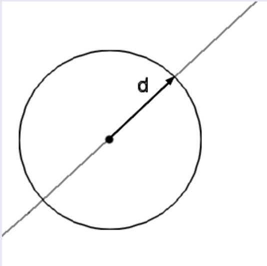

Figure: Choix d'une direction aléatoire

Perturbation

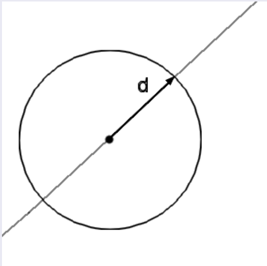

Figure: Choix d'une direction aléatoire

Déplacement dans la direction : Loi normale

Comparaison des résultats

Les points M_k

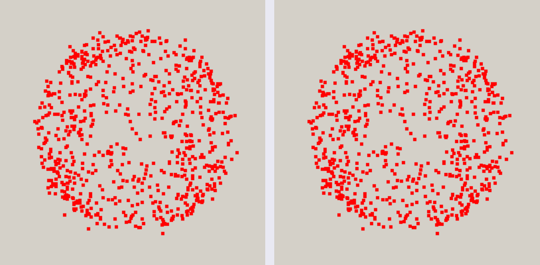

Figure: Résultat de la reconstruction, à gauche LP, à droite MC

Comparaison des résultats

Les points M_k, la surface Q

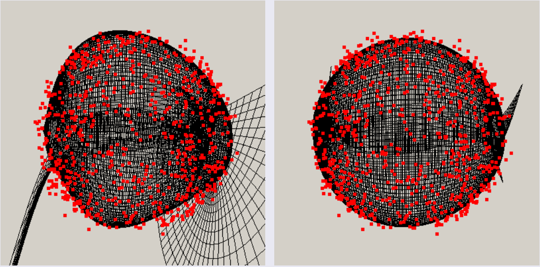

Figure: Résultat de la reconstruction, à gauche LP, à droite MC

Comparaison des résultats

Les points M_k, la surface Q et les distances

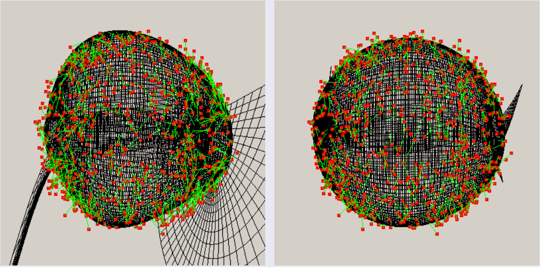

Figure: Résultat de la reconstruction, à gauche LP, à droite MC

Comparaison des résultats

Exploitation des résultats

- On relève les vecteurs verts
- On calcule leur norme euclidienne
- On les place dans un histogramme

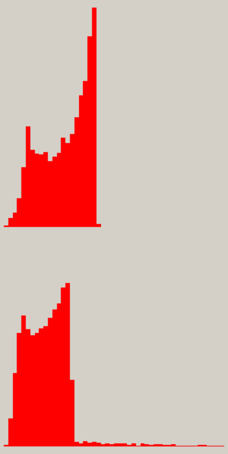

Figure: Résultat d'une très bonne reconstruction (En haut PL, en bas MC)

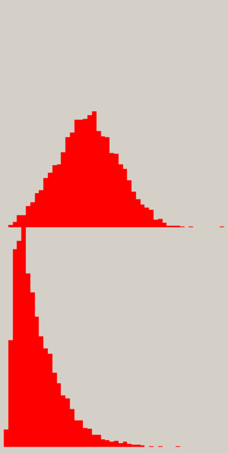

Figure: Résultat d'une mauvaise reconstruction (En haut PL, en bas MC)

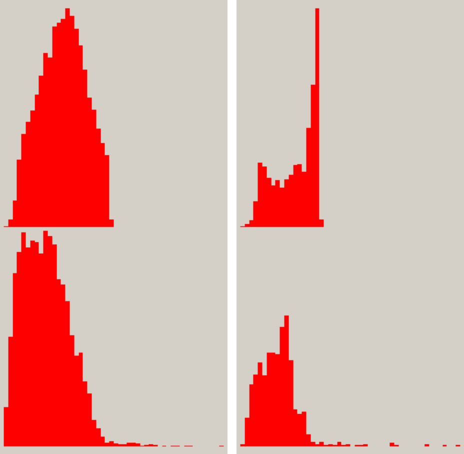

Figure: Résultat d'une bonne reconstruction (En haut PL, en bas MC)

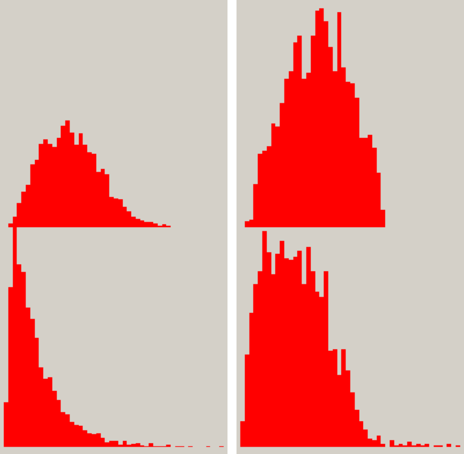

Figure: Résultat d'une reconstruction (données perturbées) (En haut PL, en bas MC)

Bilan

- Résultats satisfaisants
- Bonne reconstruction des surfaces
- Bonne réaction à la perturbation

Perspectives

- Paramètres
  - Affectation
  - Réaffectation
- Travailler par morceaux :
  - Partager les données
  - Recoller les surfaces

Questions ?